CCS PSI MATHS2 2023

Partie I non donnée, c'est le calcul de l'intégrale de Gauss via une intégrale à paramètre comme on a vu en TD.

Pour correspondre au DS, soustraire 7 aux numéros des questions de ce corrigé.

Rémi Crétois

version du 19 mai 2023

I Intégrale de Gauss

Q 1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, par croissances comparées, $t^2\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc $\mathrm{e}^{-t^2} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ aussi par comparaison. Donc l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t \text{ est bien convergente}}$.

Q 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ est continue sur $[0,1]$ par opérations. Donc la fonction $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)(-x)^2}}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = f(x)$$

donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.
Enfin, $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1$, donc $\boxed{f(0) = \dfrac{\pi}{4}}$.

Q 3. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. On pose $h : (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.

- Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$ (voir question précédente) et $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ est continue sur $[0,1]$;
- pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant 2|x|\mathrm{e}^{-x^2}$. Or, la fonction $x \mapsto 2|x|\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$, donc elle est bornée (on peut aussi faire l'étude de fonction pour voir qu'elle est majorée par sa valeur en $1/\sqrt{2}$). Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant M$. La fonction $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x^2}\ \mathrm{d}t}$.

Q 4. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction g est l'unique primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ qui s'annule en 0. En particulier, $\boxed{g \text{ est de classe } C^1}$.

Q 5. Pour éviter les ennuis, on commence par remarquer que l'égalité est vraie pour $x = 0$ car $f'(0) = 0$ et $g(0) = 0$. Puis, pour $x \neq 0$, on pose $u = xt$:

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{x} = -2\mathrm{e}^{-x^2}g(x) = -2g'(x)g(x)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2g'(x)g(x)}$.

Q 6. D'après les questions précédentes, les fonctions f et $x \mapsto \dfrac{\pi}{4} - g(x)^2$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et ont la même dérivée. Elle sont donc égales à une constante près. Or, $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$, donc les deux fonctions coïncident en 0. Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x)^2}$.

Q 7. On applique le théorème de convergence dominée :
- pour tout $t \in [0,1]$, $h(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$, de même que la fonction nulle ;
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, $|h(x,t)| \leqslant 1$ qui est une fonction indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$.

Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 0 \ \mathrm{d}t = 0}$.

Puis, $g(x)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \ \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

II Formule de Stirling

Q 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t^n\mathrm{e}^{-t} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ par comparaison. Donc $\boxed{I_n \text{ est bien définie}}$.

Q 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On réalise une intégration par parties : on pose $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ qui sont deux fonctions de classe C^1 de sorte que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$:

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) \ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)] - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) \ \mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t} \ \mathrm{d}t$$

donc $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n}$. Comme $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ \mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, on a par récurrence immédiate, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = n!}$.

Q 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $t = n + \sqrt{n}y$ qui est C^1 bijectif strictement croissant. On a $y = -\sqrt{n} + \dfrac{t}{\sqrt{n}}$, donc

$$I_n = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(n + \sqrt{n}y\right)^n \mathrm{e}^{-n-\sqrt{n}y}\sqrt{n}\mathrm{d}y = \sqrt{n}n^n\mathrm{e}^{-n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-\sqrt{n}y}\mathrm{d}y$$

D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{n! = \sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-\sqrt{n}y}\mathrm{d}y}$.

Q 11. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $N = \lfloor y^2 \rfloor + 1$. Alors pour tout $n \geqslant N$, $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{y^2} = |y|$, donc $-\sqrt{n} \leqslant y$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$,

$$f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{n\ln(1+y/\sqrt{n})-y\sqrt{n}}.$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, $n\ln(1+y/\sqrt{n}) - y\sqrt{n} = n(y/\sqrt{n} - y^2/2n + o(1/n^2)) - y\sqrt{n} = -y^2/2 + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -y^2/2$. Ainsi, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f_n(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-y^2/2}}$ par continuité de l'exponentielle.

Q 12. La fonction q est continue sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par opérations. De plus, au voisinage de 0, $q(x) = \dfrac{x-(x-x^2/2+o(x^2))}{x^2} = \dfrac{1}{2}+o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{q \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } q(0)=\frac{1}{2}}$.

Q 13. Soit $x>-1$. La fonction $u\mapsto 1+ux$ est continue et ne s'annule pas sur $[0,1]$, donc l'intégrale est bien définie. De plus, si $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{ux}{1+ux}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1+ux-1}{1+ux}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{x}-\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{1+ux}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}[\ln(1+ux)]_0^1\\ &= \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\end{aligned}$$

Pour $x=0$, $q(0)=\dfrac{1}{2}=\displaystyle\int_0^1 u\,\mathrm{d}u$.

Donc $\boxed{\forall x>-1,\ q(x)=\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u}$.

Q 14. Soit $-1<x<y$. Pour tout $u\in[0,1]$, $-1<-u<ux<uy$, donc $0<1+ux<1+uy$ et $\dfrac{u}{1+ux}>\dfrac{u}{1+uy}$, donc $q(x)>q(y)$ par croissance de l'intégrale. Ainsi, $\boxed{q \text{ est décroissante sur }]-1,+\infty[}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{R}_+$.

Si $y=0$, alors l'inégalité est bien vérifiée.

Si $y>0$ alors $\dfrac{\ln(f_n(y))}{y^2}=-q\left(\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)\leqslant -q(y)$ car la fonction $-q$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\dfrac{y}{\sqrt{n}}\leqslant y$.

Donc $\boxed{\forall y\in\mathbb{R}_+,\ f_n(y)\leqslant \mathrm{e}^{-y^2q(y)}=\mathrm{e}^{-y}(1+y)}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{R}_-^*$. Alors, si $y\leqslant-\sqrt{n}$, $f_n(y)=0\leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}$ et si $y>-\sqrt{n}$, alors $f_n(y)>0$ et $\dfrac{\ln(f_n(y))}{y^2}=-q\left(\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)\leqslant -q(0)$ car $-q$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$. Donc $\ln(f_n(y))\leqslant -\dfrac{y^2}{2}$ et $\boxed{\forall y\in\mathbb{R}_-^*,\ f_n(y)\leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}}$.

Q 15. Appliquons le théorème de convergence dominée :

— pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (questions 8 et 10) ;

— (f_n) converge simplement vers $f: y\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (question 1 et parité) ;

— pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{R}$, $0\leqslant f_n(y)\leqslant g(y)$ où $g: y\mapsto \begin{cases}(1+y)\mathrm{e}^{-y} & \text{si } y\geqslant 0\\ \mathrm{e}^{-y^2/2} & \text{si } y<0\end{cases}$ qui est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable au voisinage de $+\infty$ (question 8) et de $-\infty$ (question 1).

Donc $\displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\mathrm{d}y \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y = 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y$ par parité.

En effectuant le changement de variable $t=\dfrac{y}{\sqrt{2}}$, cette limite vaut donc $2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi}$

d'après la question 7.

D'après la question 10, on a donc $\dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2\pi}$ et $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Q 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
w_n = v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)}\sqrt{n+1}n!}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}(n+1)!}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^n\mathrm{e}^{-1}\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}}\right) \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$. En particulier, (w_n) est positive à partir d'un certain rang et comme la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann, $\boxed{\text{la série } \sum w_n \text{ converge aussi}}$.

Q 17. Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$, donc $1-\varepsilon \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant 1+\varepsilon$. Ainsi, comme (b_n) est une suite de réels strictement positifs, $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ (1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n}$.

Q 18. La série $\sum(1+\varepsilon)b_n$ converge donc la série $\sum a_n$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

De plus, pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(1-\varepsilon)b_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}(1+\varepsilon)b_k$, donc $\forall n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} - 1\right| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $\dfrac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k}$.

Q 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[n, n+1]$, donc pour tout $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant \dfrac{1}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Par croissance de l'intégrale, $\boxed{\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}}$.

Q 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'encadrement précédent, $R_{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathbb{R}_n$, l'intégrale étant convergente car $2 > 1$.

Donc pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n} \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$, et par encadrement, $\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}}$.

Q 21. Comme $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$, que la suite $\left(\dfrac{1}{12n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive et $\sum \dfrac{1}{12n^2}$ converge et

(w_n) est positive à partir d'un certain rang au moins, on a d'après la question 18, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12}R_n$.

D'après la question 20, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n}}$.

Q 22. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \lim(v_k) - v_n$. Or $v_k = \ln(u_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\ln(\sqrt{2\pi})$ d'après la question 15. D'après la question 21, $-\ln(\sqrt{2\pi}) - v_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(\sqrt{2\pi}) - \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Enfin, $\dfrac{1}{u_n} = \mathrm{e}^{-v_n} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2\pi}\left(1 + \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$. En posant $q_n = n\left(\dfrac{1}{u_n\sqrt{2\pi}} - 1 - \dfrac{1}{12n}\right)$, on obtient donc $\boxed{q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } n! = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\left(1 + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{q_n}{n}\right)}$.